

# 基于分圆类的完备高斯整数序列构造

刘凯, 马国斌, 陈盼盼

(1. 燕山大学信息科学与工程学院, 河北秦皇岛 066004; 2. 河北省信息传输与信号处理重点实验室, 河北秦皇岛 066004)

**摘要:** 完备高斯整数序列(PGIS)应用于扩频通信系统不仅能抑制干扰,而且可以获得高的传递率和频谱利用率,因此本文基于分圆类提出一类与现有PGIS参数不同的奇长度PGIS的构造方法,PGIS的电平数(degree)为2和3,并且利用系数序列和交织方法将奇数长PGIS扩展为偶数长PGIS.在一定条件下,基于分圆类的构造方法,可以获得大量高能量效率PGIS,最大能量效率接近1,这对工程应用具有重要的实际意义,本文的构造结果可为宽带扩频通信系统提供更多的地址选择空间.

**关键词:** 完备高斯整数序列; 分圆类; 能量效率; 自相关函数

**中图分类号:** TN911.2      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112(2019)04-0806-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.04.006

## Construction of Perfect Gaussian Integer Sequences Based on Cyclotomic Classes

LIU Kai, MA Guo-bin, CHEN Pan-pan

(1. School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China;

2. Hebei Province Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

**Abstract:** Perfect Gaussian integer sequences (PGIS) applied to spread spectrum communication systems can not only restrain disturbance, but also obtain high transmission efficiency and spectrum efficiency. Therefore, this paper presents a class of PGIS with odd length and nonzero level (i. e. degree) for 2 and 3 based on cyclotomic classes. Simultaneously, using coefficient sequence and interleaving method, the odd length PGIS is extended to even length PGIS. Under certain conditions, based on the construction method of cyclotomic classes, a large number of high energy efficiency PGIS can be obtained, and the maximum energy efficiency is close to 1, which is of great practical significance to the engineering application. The result of this paper provides more address selection space for broadband spread spectrum communication systems.

**Key words:** perfect Gaussian integer sequence (PGIS); cyclotomic classes; energy efficiency; autocorrelation function

### 1 引言

高斯整数序列是一类形如  $a + bj$  的复数序列,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , 其中  $j = \sqrt{-1}$ , 通信中广泛应用的四元序列和 QAM 序列是高斯整数序列的特殊形式. 高斯整数序列作为新型地址码可应用于正交频分复用 (OFDM) 系统<sup>[1,2]</sup>和码分多址 (CDMA) 系统<sup>[3,4]</sup>中, 提供高的传输效率和高频谱利用率. 近年来, 高斯整数序列设计吸引了一批优秀研究者, 尤其是具有理想自相关特性的高斯整数序列, 即完备高斯整数序列 (PGIS) 设计成为了最

佳序列设计领域新的研究方向, 大大的扩展了最佳序列的存在范围.

现有 PGIS 的构造方法主要集中于分圆, 循环差集, 交织以及多项式等方法实现. 基于分圆思想, 在有限域  $G(p)$  上, 文献[5]利用 2 阶和 4 阶分圆构造了非零元素数 (degree) 为 3 和 5 的 PGIS, 文献[6]结合傅里叶变换在 2 阶分圆上构造了 degree-2 和 3 的 PGIS, 并利用上采样技术将  $p$  长 degree-2 和 3 的 PGIS 扩展为  $mp$  长的 degree-3 和 4 的 PGIS, 其中  $p = ef + 1$  为奇素数; 文献[7]利用 Whiteman 广义分圆在有限域  $G(N)$  中构造了 degree-

3 和 5 的 PGIS, 其中  $N = p(p+2)$ ,  $p$  为素数. 利用循环差集, 文献 [8, 9] 构造了长度为  $N = 2^m - 1$  degree-2 的 PGIS; 文献 [10] 基于参数为  $(N, \frac{N-2}{2}, \frac{N-3}{4})$  的循环差集构造了 degree-4 的 PGIS. 运用交织方法, 文献 [11] 利用两个长度为  $N$  的完备整数序列进行交织和映射构造了长度为  $2N$  电平数不确定的 PGIS. 除了以上方法外, 文献 [11] 将整数集合  $Z_N$  划分成  $k+1$  个子集, 并定义了一个由  $k+1$  个不同元素组成的基本序列, 建立了构造 PGIS 的  $k+1$  个不同系数的  $k$  个约束方程, 构造出长度为  $N = p^k$ , degree 小于  $k+1$  的 PGIS, 其中  $p$  是质数. 在 PGIS 的设计过程中, 文献 [15] 提出了高斯整数能量效率的指导思路, 利用离散傅里叶变换构造了一些偶长度的 PGIS, 并计算出对应的能量效率. 最近文献 [13] 通过简单 PGIS 和多个扩展域上的迹函数运算构造了大量的 degree-2 的长 PGIS, 当序列长度足够长时可实现能量效率为 1.

在通信系统中序列具有高的能量效率意味着传输峰均比低, 对实际应用更有工程意义, 因此本文提出了基于分圆类来实现高能量效率的 PGIS 构造方法. 本文分离出高斯整数序列的实部和虚部序列, 给出了构造 PGIS 的实部及虚部序列参数充要条件, 基于 2 阶分圆类得到了一类奇长度且具有高能量效率的 PGIS; 同时给出了所构造序列的长度扩展方法, 得到了偶数长为  $2N$  的 PGIS. 本文构造出的 PGIS 参数设置灵活, 数量多, 结构简单, 具有较高的能量效率, 推广了最佳序列的设计结果.

## 2 预备知识

**定义 1** 设长度为  $N$  的高斯整数序列  $s(t) = a(t) + b(t)j$ , 其中  $a = (a(t) | 0 \leq t \leq N-1)$ ,  $b = (b(t) | 0 \leq t \leq N-1)$  是整数序列,  $j = \sqrt{-1}$ , 则序列  $s$  的自相关函数表示为

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \sum_{t=0}^{N-1} s(t)s^*(t+\tau) \\ &= \sum_{\tau=0}^{N-1} (a(t) + b(t)j)(a(t+\tau) + b(t+\tau)j)^* \\ &= R_a(\tau) + R_b(\tau) - (R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau))j \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $s^*(t+\tau)$  表示  $s(t+\tau)$  的共轭,  $0 \leq \tau \leq N-1$ . 若满足

$$R_s(\tau) = \begin{cases} R, & \tau=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

则序列  $s$  是 PGIS, 其中  $R$  不为 0.

**定义 2**<sup>[14]</sup> 设  $N = ef + 1$  为奇素数幂,  $G(N)$  为有限域.  $G(N)^* = G(N) \setminus \{0\}$ , 设  $k$  为  $G(N)$  的本原元,  $z = k^e$ , 令

$$H_i^e = (k^i, k^i z, k^i z^2, \dots, k^i z^{e-1}), 0 \leq i \leq e-1 \quad (3)$$

称  $H_0^e, H_1^e, \dots, H_{e-1}^e$  为  $e$  次分圆类.

**定义 3**<sup>[14]</sup> 设  $N = ef + 1$  为奇素数幂, 有  $0 \leq i, m \leq e-1$ , 则

$$\begin{aligned} (i, m)_e &= |\{(x, y) | x \in H_i^e, y \in H_m^e, x+1=y\}| \\ &= |(H_i^e + g) \cap H_m^e| \end{aligned} \quad (4)$$

$(i, m)_e$  为  $e$  阶分圆数, 且有如下性质:

(1)  $(i', m')_e = (i, m)_e$ , 其中  $i' \equiv i \pmod{e}$ ,  $m' \equiv m \pmod{e}$ ;

(2)  $(i, m)_e = (e-i, m-i)_e$ ;

(3) 当  $g \in H_l^e, x+g=y, x \in H_i^e, y \in H_m^e$ , 则方程解的个数为  $(i-l, m-l)_e$ .

**定义 4**<sup>[15]</sup> 设序列  $s = (s(t) | 0 \leq t \leq N-1)$ , 其能量效率  $\eta$  定义为

$$\eta = \frac{E_s}{\max_{0 \leq t \leq N-1} |s(t)|^2} \quad (5)$$

其中,  $E_s = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} |s(t)|^2$  为信号的平均能量. 显然, 序列能量效率的表达式是峰值平均功率比 (PAPR) 的倒数, 因此实际工程中期望应用的序列应当具有较高的能量效率.

**引理 1**<sup>[16]</sup> 设  $N = 2f + 1$  为奇素数幂, 那么

(1) 如果  $f$  是偶数, 则 2 阶分圆数满足

$$(0, 0)_2 = \frac{(f-2)}{2}, (0, 1)_2 = (1, 1)_2 = (1, 0)_2 = \frac{f}{2} \quad (6)$$

(2) 如果  $f$  为奇数, 则 2 阶分圆数满足

$$(0, 1)_2 = \frac{(f+1)}{2}, (0, 0)_2 = (1, 1)_2 = (1, 0)_2 = \frac{(f-1)}{2} \quad (7)$$

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设  $N = 2f + 1$  为奇素数幂, 二次分圆类为  $H_i^2, 0 \leq i \leq 1$ , 那么有如下性质

(1) 若  $f$  是偶数,  $g \in H_i^2$ , 则  $N-g \in H_i^2$ ;

(2) 若  $f$  是奇数,  $g \in H_i^2$ , 则  $N-g \in H_{i+1}^2$ .

## 3 PGIS 构造方法

### 3.1 长度为奇素数 $N = 2f + 1$ 的 PGIS 构造

**引理 3** 设整数序列  $a = (a(t) | 0 \leq t \leq N-1)$ ,  $b = (b(t) | 0 \leq t \leq N-1)$ , 则  $s = \{s(t) | 0 \leq t \leq N-1\}$ ,  $s(t) = a(t) + b(t)j$  是 PGIS 的充要条件为序列  $s$  满足

$$R_a(\tau) + R_b(\tau) = \begin{cases} R, & \tau=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且  $R_{ab}(\tau) = R_{ba}(\tau), \tau = 1, 2, \dots, N-1, R$  为正整数.

**引理 4** 若序列  $s = \{s(t) | 0 \leq t \leq N-1\}$ ,  $s(t) = a(t) + b(t)j$  为 PGIS, 那么  $s' = \{s'(t) | 0 \leq t \leq N-1\}$ ,  $s'(t) = b(t) + a(t)j$  也为 PGIS.

引理 3 和 4 可由定义 1 得出, 引理 4 提示 PGIS 可通过实部和虚部序列互换方式得到两组不同的序列.

引理 3 揭示当序列  $\mathbf{a}$  的所有元素值相同 (不为零), 不论序列  $\mathbf{b}$  内的元素取何值, 都有  $R_{ab}(\tau) = R_{ba}(\tau)$ , 那么需要  $\mathbf{a}$  和  $\mathbf{b}$  满足

$$R_a(\tau) + R_b(\tau) = \begin{cases} R, & \tau = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

序列  $\mathbf{s}$  即为 PGIS, 由此本文提出构造 PGIS 的方法如下.

设  $N = 2f + 1$  为奇数幂, 2 阶分圆类为  $H_i^2$ , 其中  $0 \leq i < 2$ , 定义一个长度为  $N$  的复整数序列  $\mathbf{s} = \{s(t) | 0 \leq t \leq N - 1, s(t) = a(t) + b(t)j\}$ , 有

$$a(t) = A, b(t) = \begin{cases} B, & t = 0 \\ C, & t \in H_0^2 \\ D, & t \in H_1^2 \end{cases} \quad (8)$$

即可得

$$s(t) = \begin{cases} A + Bj, & t = 0 \\ A + Cj, & t \in H_0^2 \\ A + Dj, & t \in H_1^2 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $A, B, C, D$  是任意整数, 且  $B, C, D$  不全为 0.

**定理 1** 按照上述条件构造的高斯整数序列  $\mathbf{s}$  是 PGIS 的充要条件为

$$(C + D)^2 \cdot \frac{(f-1)}{2} + (BC + CD + DB) = -A^2 \cdot N \quad (10)$$

**证明** 由上述构造方法可知序列  $\mathbf{a} = (a(t) | 0 \leq t \leq N - 1)$  是元素全为  $A$  的恒值序列, 所以整数序列  $\mathbf{b} = (b(t) | 0 \leq t \leq N - 1)$  中元素不论取何值, 显然都有  $R_{ab}(\tau) = R_{ba}(\tau)$ , 且由于  $B, C$  和  $D$  是不全为 0 的整数, 因此  $R_a(0) + R_b(0) = R$ ,  $R$  为正整数. 同时, 由定义 3 可得

$$\begin{aligned} R_a(\tau) + R_b(\tau) &= A^2 \cdot N + C^2((H_0^2 + \tau) \cap H_0^2) \\ &\quad + D^2 \cdot ((H_1^2 + \tau) \cap H_1^2) \\ &\quad + DC(N - ((H_0^2 + \tau) \cap H_0^2) \\ &\quad - ((H_1^2 + \tau) \cap H_1^2) - 2) \\ &\quad + B(s(\tau) + s(N - \tau)) \\ &= A^2 \cdot N + C^2(i, 0)_2 + D^2(i + 1, 0)_2 \\ &\quad + DC(N - (i, 0)_2 - (i + 1, 0)_2 - 2) \\ &\quad + B(s(\tau) + s(N - \tau)) \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\tau = 1, 2, \dots, N - 1, i = 0, 1$ .

由引理 3 可知, 当  $\tau \neq 0$  时序列  $\mathbf{s}$  为 PGIS 的充要条件为  $R_a(\tau) + R_b(\tau) = 0$ , 式(11)按  $f$  的奇偶分别讨论:

(1) 当  $f$  是奇数,

若  $\tau \in H_0^2$ , 由引理 1 和 2 可得

$$\begin{aligned} R_a(\tau) + R_b(\tau) &= A^2 \cdot N + (C^2 + D^2) \cdot \frac{(f-1)}{2} \\ &\quad + DC \cdot f + B(D + C) \\ &= A^2 \cdot N + (C + D)^2 \cdot \frac{(f-1)}{2} \end{aligned}$$

$$+ CD + B(C + D) \quad (12)$$

即若满足  $(C + D)^2 \cdot \frac{(f-1)}{2} + (BC + CD + DB) = -A^2 \cdot N$ , 则  $R_a(\tau) + R_b(\tau) = 0$ .

若  $\tau \in H_1^2$ , 同样有  $(C + D)^2 \cdot \frac{(f-1)}{2} + (BC + CD + DB) = -A^2 \cdot N$ .

(2) 当  $f$  是偶数,

若  $\tau \in H_0^2$ ,

$$\begin{aligned} R_a(\tau) + R_b(\tau) &= A^2 \cdot N + C^2 \cdot \frac{(f-2)}{2} + D^2 \cdot \frac{f}{2} \\ &\quad + DC \cdot f + 2BC = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

若  $\tau \in H_1^2$ ,

$$\begin{aligned} R_a(\tau) + R_b(\tau) &= A^2 \cdot N + C^2 \cdot \frac{f}{2} + D^2 \cdot \frac{(f-2)}{2} \\ &\quad + DC \cdot f + 2BD = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

整理后可得当  $f$  为偶数时  $R_a(\tau) + R_b(\tau) = 0$  的充要条件为

$$\begin{cases} \frac{f}{2} \cdot (C + D)^2 - C^2 + 2BC + A^2N = 0 \\ \frac{f}{2} \cdot (C + D)^2 - D^2 + 2BD + A^2N = 0 \end{cases} \quad (15)$$

方程组(15)两式相加合并可得

$$(C + D)^2 \cdot \frac{(f-1)}{2} + (BC + CD + DB) = -A^2 \cdot N \quad (16)$$

综上所述定理 1 成立.

证毕

根据定理 1 给出了实现 PGIS 的实部和虚部序列的参数约束条件, 可以提供大量的参数组合形式. 满足式(10)的参数形式很多, 分别对  $f$  为奇数和偶数两种情况讨论, 下面举例说明:

(1)  $f$  为奇数, 当  $|C + D| = 1$  时, 有  $B = \pm(A^2N + \frac{f-1}{2} + CD)$  为整数, 但此时若  $f$  为偶数, 式(10)则无解;

(2)  $f$  为偶数, 令  $C + D = 2k$ , 其中  $k$  为整数, 则  $C$  与  $D$  奇偶性相同, 当  $A$  与  $C, D$  奇偶性也相同时,  $B$  有整数解, 例如: 若  $C = D = k, A = pk$ , 其中  $p$  为奇数, 则  $B = -k \cdot \frac{(2f-1) + (2f+1)p^2}{2}$ ; 若  $C = 4k, D = -2k, A = 2nk$ , 其中  $n$  为整数, 则  $B = -k[(f-5) + 2n^2(2f+1)]$ .

(3) 若取  $A = C = D$  时, 无论  $f$  为何值, 定理 1 都可得整数解  $B = -2fA$ . 除以上举例, 其他情况也存在解.

**例 1** 当  $N = 2f + 1 = 7$  时,  $f = 3$  为奇数, 2 阶分圆类为  $H_0^2 = (1, 2, 4), H_1^2 = (3, 5, 6)$ , 设  $A = 1$ , 可取  $B = 6, C = -1, D = 2$ , 则序列  $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1), \mathbf{b} = (-6, -1, -1, 2, -1, 2, 2)$ , 可得  $\mathbf{s} = (1 - 6j, 1 - j, 1 - j, 1 + 2j, 1 - j, 1 + 2j, 1 + 2j)$ , 它是一个实部恒为 1, 长度为 7, 电平

数为 3 的 PGIS, 其自相关函数为  $R_s(\tau) = (58, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

### 3.2 长度为偶数的 PGIS 扩展构造方法

为了更好地满足工程实际需要, 本文利用交织方法和系数序列将奇数长的 PGIS 扩展到偶数长, 构造过程如下.

设序列  $s = \{s(t) \mid 0 \leq t \leq N-1\}$ , 其中  $N$  为奇数. 对序列  $s$  进行交织操作得到序列

$$\begin{aligned} s' &= I(s(t), s(t + \frac{N+1}{2})_{\text{mod}N}) \\ &= (s(0), s(\frac{N+1}{2}), s(1), s(1 + \frac{N+1}{2}), \dots, \\ &\quad s(N-1), s(\frac{N-1}{2})), \end{aligned}$$

其中,  $I$  称为交织操作. 令序列  $l = (l_0, l_1) = (a \pm aj, b \mp bj)$  或者  $(a \pm bj, b \mp aj)$ , 其中  $a$  和  $b$  为不全为零的整数, 那么可定义  $2N$  长序列为  $m = \{m(t) = s'(t) * l_{t \text{ mod } 2} \mid 0 \leq t \leq 2N-1\}$ .

**定理 2** 当上述基序列  $s = \{s(t) \mid 0 \leq t \leq N-1\}$  为 PGIS 时, 序列  $m$  是长度为  $2N$  的 PGIS.

**证明** 由于  $s$  为 PGIS, 其自相关函数可表示为

$$R_s(\tau) = \begin{cases} R, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

序列  $l$  的自相关函数为

$$R_l(\tau) = \begin{cases} 2(a^2 + b^2), & \tau = 0 \\ 0, & \tau = 1 \end{cases}$$

下面以  $l = (l_0, l_1) = (a + aj, b - bj)$  为例证明, 其余情况类似. 设  $0 \leq \tau \leq 2N-1$ , 令  $\tau = 2\tau_1 + \tau_2$ , 其中  $0 \leq \tau_1 \leq N-1, \tau_2 = 0, 1$ , 那么

(1) 当  $\tau = 0$  时,

$$\begin{aligned} R_m(0) &= l_0^2 \sum_{t=0}^{N-1} s(t) * s^*(t) + l_1^2 \sum_{t=0}^{N-1} s(t + \frac{N+1}{2})_{\text{mod}N} \\ &\quad * s^*(t + \frac{N+1}{2})_{\text{mod}N} \\ &= R_l(0) * R_s(0) \\ &= 2(a^2 + b^2)R_s(0) \end{aligned} \quad (17)$$

(2) 当  $\tau \neq 0$  时, 若  $\tau_2 = 0$ , 则有  $\tau_1 \neq 0$ , 那么

$$\begin{aligned} R_m(\tau) &= l_0^2 \sum_{t=0}^{N-1} s(t) * s^*(t + \tau_1)_{\text{mod}N} \\ &\quad + l_1^2 \sum_{t=0}^{N-1} s(t + \frac{N+1}{2})_{\text{mod}N} * s^*(t + \frac{N+1}{2} + \tau_1)_{\text{mod}N} \\ &= R_l(0) * R_s(\tau_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

若  $\tau_2 = 1$ ,

$$R_m(\tau) = l_0 * l_1^* \sum_{t=0}^{N-1} s(t) * s^*(t + \frac{N+1}{2} + \tau_1)_{\text{mod}N}$$

$$\begin{aligned} &+ l_1 * l_0^* \sum_{t=0}^{N-1} s(t + \frac{N+1}{2})_{\text{mod}N} * s^*(t + \tau_1 + 1) \\ &= R_l(1) * R_s(\frac{N+1}{2} + \tau_1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

综上所述定理 2 成立.

证毕

**例 2** 例 1 中  $s = (1 - 6j, 1 - j, 1 - j, 1 + 2j, 1 - j, 1 + 2j, 1 + 2j)$  是长度为 7 的 PGIS, 那么  $s' = (1 - 6j, 1 - j, 1 - j, 1 + 2j, 1 - j, 1 + 2j, 1 + 2j, 1 - 6j, 1 - j, 1 - j, 1 + 2j, 1 - j, 1 + 2j, 1 + 2j)$ , 选取  $l = (1 + j, 1 - j)$ , 可得  $m = (7 - 5j, -2j, 2, 3 + j, 2, 3 + j, -1 + 3j, -5 - 7j, 2, -2j, -1 + 3j, -2j, -1 + 3j, 3 + j)$ , 自相关函数为  $R_m(\tau) = (232, 0, 0, \dots, 0)$ , 序列  $m$  为长度为 14 的 PGIS.

## 4 PGIS 能量效率分析

根据定义 4 和定理 1 中构造的 PGIS 参数形式, 容易得到序列的能量效率为

$$\eta = \frac{E_s}{\max_{0 \leq t \leq N-1} |s(t)|^2} = \frac{A^2 + \frac{B^2}{2f+1} + \frac{f}{2f+1}(C^2 + D^2)}{A^2 + \max(B^2, C^2, D^2)} \quad (20)$$

其中,  $E_s = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} |s(t)|^2 = \frac{1}{N}(NA^2 + B^2 + \frac{N-1}{2}(C^2 + D^2))$ ,  $\max_{0 \leq t \leq N-1} |s(t)|^2 = A^2 + \max(B^2, C^2, D^2)$ .

若令  $C + D = -1$ , 则有  $B = A^2N + \frac{f-1}{2} + CD$ . 不妨设  $C \geq 0$ , 显然有负整数  $D = -(C+1)$ , 那么  $C < |D|$ . 再令  $|B| \leq |D|$ , 则  $|D| = \max\{|B|, |C|, |D|\}$ , 此时式(20)可化简为:

$$\eta = \frac{A^2N}{A^2 + D^2} + \frac{(D^2 + D + \frac{f+1}{2} - A^2N)^2}{N(A^2 + D^2)} \quad (21)$$

可见, 序列能量效率受到  $A, D$  和  $f$  的影响, 且由于  $D$  为负整数, 根据  $|B| \leq |D|$ , 可得:

$$-1 - \sqrt{A^2N + \frac{(f-1)}{2} + 1} \leq D \leq -\sqrt{A^2N + \frac{(f-1)}{2}} \quad (22)$$

式(22)给出了  $D$  的取值条件,  $D$  受到  $A$  和  $f$  取值的制约, 从而可相应确定  $C$  和  $B$  的值. 图 1 显示了当  $f$  分别为 3, 5 和 7 时, 即序列长度  $N$  分别为 7, 11, 19 时,  $\eta$  随  $|A|$  的变化情况; 图 2 给出了  $|A|$  取值在  $[1, 50]$  区间内且  $N \leq 200$  (由定义 3 计算可得  $f$  为奇数时存在 2 阶分圆的序列长度为 3, 7, 11, 19, 31, 59, 67, 83, 107, 131, 139, 163, 179) 时的  $\eta$  最小值  $\eta_{\min}$ 、最大值  $\eta_{\max}$  及平均值  $\eta_{\text{mean}}$  的分布曲线.

图 1 中显示随着  $f$  值的增加  $\eta$  也增大,  $N=19$  的曲线

明显比  $N=7$  的曲线平均能量效率高;当  $f, A$  足够大时,  $\eta$  趋近于 1. 图 2 可见, 当  $N > 7$ ,  $\eta_{\min}$  都超过 70%;  $\eta_{\text{mean}}$  皆大于 90%, 而接近 1 的  $\eta_{\max}$  几乎发生在全部长度上. 这说明随着  $N$  的增大序列能量效率  $\eta$  递增, 且  $\eta_{\text{mean}}$  曲线  $N$  越增大, 曲线越靠近  $\eta_{\max}$ , 表明具有高能量效率的 PGIS 数量

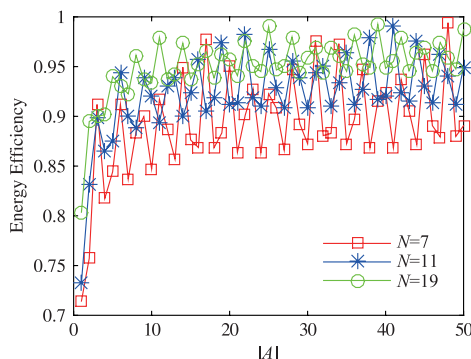


图1  $f$  为奇数时能量效率  $\eta$  与  $L$  的关系对比曲线

越多, 适合于工程应用. 本文给出了长度为  $N=2f+1$  的 PGIS 构造方法, 文献[5]和[6]也利用 2 阶分圆得到了相同长度且电平特征相近的 PGIS, 现以  $N=19$  长 PGIS 为例比较本文与已有文献构造结果见表 1.

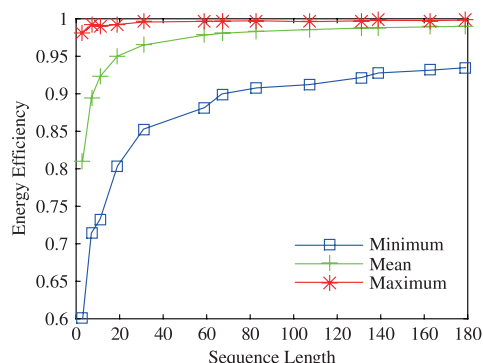


图2 能量效率  $\eta$  随序列长度  $N$  的变化对比曲线

表 1 序列长度为 19 的 PGIS 比较

文献	定理	电平数 (degree)	能量效率 ( $\eta$ )	构造实例
[5]	定理 1 (例 1)	3	70.8%	$(-2-2j, -3-3j, 2+2j, 2+2j, -3-3j, -3-3j, -3-3j, -3-3j, 2+2j, -3-3j, 2+2j, -3-3j, 2+2j, +2+2j, 2+2j, 2+2j, -3-3j, -3-3j, 2+2j)$
	定理 4 (例 1)	3	70.8%	$(-20-20j, -30-30j, 20+20j, 20+20j, -30-30j, -30-30j, -30-30j, -30-30j, 20+20j, -30-30j, 20+20j, -30-30j, 20+20j, 20+20j, 20+20j, -30-30j, -30-30j, 20+20j)$
[6]	定理 5 (例 3)	2	68.4%	$(-7-j, -7-j, 10+5j, 10+5j, -7-j, -7-j, -7-j, -7-j, 10+5j, -7-j, 10+5j, -7-j, 10+5j, 10+5j, 10+5j, 10+5j, -7-j, -7-j, 10+5j)$
	定理 7 (例 4)	2	16.3%	$(37-16j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j, -1+3j)$
本文	定理 1	3	80.4%	$(1+3j, 1+4j, 1-5j, 1-5j, 1+4j, 1+4j, 1+4j, 1+4j, 1-5j, 1+4j, 1-5j, 1+4j, 1-5j, 1-5j, 1-5j, 1-5j, 1+4j, 1+4j, 1-5j)$
		2	91.4%	$(2-10j, 2+9j, 2-10j, 2-10j, 2+9j, 2+9j, 2+9j, 2+9j, 2-10j, 2+9j, 2-10j, 2+9j, 2-10j, 2-10j, 2-10j, 2-10j, 2+9j, 2+9j, 2-10j)$
		3	90.0%	$(3-7j, 3+13j, 3-14j, 3-14j, 3+13j, 3+13j, 3+13j, 3+13j, 3+13j, 3-14j, 3+13j, 3-14j, 3+13j, 3-14j, 3-14j, 3-14j, 3-14j, 3+13j, 3+13j, 3-14j)$

本文与文献[5]皆在时域上利用 2 阶分圆类实现了 PGIS 的构造, 但文献[5]定理 1 的约束条件并不能覆盖本文构造结果. 文献[6]基于 2 阶分圆序列, 利用 DFT 方法在频域上实现了 PGIS 的构造, 其参数形式多样但约束条件较为复杂. 本文从工程背景出发, 设计了具有高能量效率的 PGIS 的构造方法, 得到了符合工程应用的大量高能量效率的 PGIS, 这也是区别于文献[5]和[6]之处.

## 5 结论

本文基于 PGIS 的实部和虚部序列相关函数需要满足的充要条件, 结合 2 阶分圆类, 构造了一类长度为

$N=2f+1$ , degree 为 2 和 3 的 PGIS, 序列形式不同于已有的构造结果, 而且通过参数约束条件可以获得接近 1 的能量效率. 此外, 还提出一种将奇数长 PGIS 扩展为偶数长序列的方法, 补充了 PGIS 的存在范围. 本方法参数设置灵活简单, 构造结果丰富, 可以获得大量具有高能量效率的 PGIS, 能很好的应用于实际通信中.

## 参考文献

- [1] CHANG C Y, LI Y, HIRATA J. New 64-QAM Golay complementary sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(5): 2479-2485.
- [2] CHONG C V, VENKATARAMANI R, TAROKH V. A

- new construction of 16-QAM Golay complementary sequences[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(11): 2953 – 2959.
- [3] DENG X M, FAN P Z, SUCHIRO N. Sequences with zero correlation over Gaussian integer[J]. IEE Electronics Letters, 2000, 36(6): 552 – 553.
- [4] HUBER K. Codes over Gaussian integers[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(1): 207 – 216.
- [5] YANG Yang, TANG Xiao-hu, ZHOU Zheng-chun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2012, 19(10): 615 – 618.
- [6] CHANG H H, LI C P, LEE C D, et al. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(7): 4107 – 4115.
- [7] MA Xiu-wen, WEN Qiao-yan, ZHANG Jie, et al. New perfect Gaussian integer sequences of period  $pq$ [J]. IEICE Transactions on Fundamental of Electronics Communications and Computer Sciences, 2013, E96-A(11): 2290 – 2293.
- [8] LEE C D, LI C P, CHANG H H, et al. Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. IET Communications, 2016, 10(12): 1542 – 1552.
- [9] LEE C D, HUANG Y P, CHANG H H, et al. Perfect Gaussian integer sequences of odd period  $2^m - 1$ [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(7): 881 – 885.
- [10] PENG X P, REN J D, XU C Q, LIU K. Perfect Gaussian integer sequences of degree-4 using difference sets[J]. IEICE Transactions on Fundamental of Electronics Communications and Computer Sciences, 2016, E99-A(12): 2604 – 2608.
- [11] PENG X P, XU C Q. New constructions of perfect Gaussian integer sequence of even length[J]. IEEE Communications Letters, 2014, 18(9): 1547 – 1550.
- [12] CHANG H H. Degree- $(k + 1)$  perfect Gaussian integer sequences of period  $p^k$ [A]. Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory[C]. Aachen, Germany; Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2017. 1505 – 1509.
- [13] LEE C D, HONG S H. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(4): 515 – 519.
- [14] 沈灏. 组合设计理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996. 127 – 159.
- [15] HU Wei-wen, WANG Sen-hung, LI C P. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(11): 6074 – 6079.
- [16] STORER T. Cyclotomy and Difference Sets[M]. Chicago: Markham Publishes Company, 1967. 25 – 83.

#### 作者简介



刘 凯 女, 1977 年生于黑龙江齐齐哈尔。现为燕山大学信息科学与工程学院副教授、硕士生导师。研究方向为无线通信编码理论。  
E-mail: liukai@ysu.edu.cn



马国斌 男, 1991 年生于湖北省孝感市。现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生。研究方向为扩频序列设计。  
E-mail: 13554570383@163.com



陈盼盼 女, 1991 年生于河北省衡水市。现为燕山大学信息科学与工程学院硕士研究生。研究方向为扩频序列设计。  
E-mail: ppchen0@163.com